二叉树的基本概念

二叉树是一种每个节点最多有两个子节点的树形结构，子节点分为左子树和右子树。二叉树的基本特性包括：

- **第 i 层最多节点数**：第 i 层（根为第 1 层）最多有2^{i-1}个节点。
- **深度为 k 的树最多节点数**：深度为 k 的二叉树最多有$2^k - 1$个节点（满二叉树）。
- **叶子节点与度为 2 的节点关系**：对任何非空二叉树，若叶子节点数为n_0，度为 2 的节点数为n_2，则$n_0 = n_2 + 1$。

二叉树的遍历方式

遍历是按一定顺序访问树中所有节点，常见方式有 4 种：

1. **前序遍历（根左右）**：先访问根节点，再递归遍历左子树，最后递归遍历右子树。

   示例：对根为 A、左子树 B（左 D 右 E）、右子树 C（右 F）的树，前序遍历为 A→B→D→E→C→F。

2. **中序遍历（左根右）**：先递归遍历左子树，再访问根节点，最后递归遍历右子树。

   示例：上述树的中序遍历为 D→B→E→A→C→F。

3. **后序遍历（左右根）**：先递归遍历左子树，再递归遍历右子树，最后访问根节点。

   示例：上述树的后序遍历为 D→E→B→F→C→A。

4. **层序遍历（广度优先）**：从根节点开始，按层次顺序（从左到右）访问各层节点。

   示例：上述树的层序遍历为 A→B→C→D→E→F。

由遍历序列还原二叉树

已知两种遍历序列可唯一确定二叉树（需含中序遍历）：

- **前序+中序**：前序的第一个元素为根，中序中根左侧为左子树节点，右侧为右子树节点，递归划分左右子树即可还原。
- **后序+中序**：后序的最后一个元素为根，中序中根左侧为左子树节点，右侧为右子树节点，递归划分左右子树即可还原。
- **前序+后序**：无法唯一确定（不含中序时，左右子树可能混淆）。

特殊二叉树类型

1. **满二叉树**：所有层的节点数均达到最大值（第 i 层有2^{i-1}个节点）。
2. **完全二叉树**：除最后一层外，各层节点数均达最大，且最后一层节点从左到右连续排列（可用数组存储，节点 i 的左孩子为 2i，右孩子为 2i+1）。
3. **二叉搜索树（BST）**：左子树所有节点值小于根，右子树所有节点值大于根，左右子树亦为 BST；中序遍历为严格递增序列。

CSP 初赛常见题型

1. **遍历序列计算**：给定树结构，求前/中/后/层序遍历结果。

   例：若二叉树前序为 ABDECF，中序为 DBEAFC，则后序为？

   解析：前序首 A 为根，中序左 DBE、右 AFC；左子树前序 BD（首 B 为根），中序 DBE（B 左 D、右 E）；右子树前序 CF（首 C 为根），中序 AFC（C 右 F）。树结构为 A(B(D,E),C(,F))，后序为 DEBFCA。

2. **树的性质应用**：计算节点数、深度等。

   例：完全二叉树有 100 个节点，求叶子数？

   解析：设深度为 h，(2^{h-1}-1 < 100 ≤ 2^h-1)，得 h=7（$2^6-1=63$，$2^7-1=127$）。前 6 层满二叉树 63 个节点，第 7 层有 100-63=37 个节点，均为叶子；第 6 层有(37+1)/2=19)个节点有孩子（因完全二叉树最后一层左连续），故第 6 层叶子数=32（第 6 层总节点）-19=13；总叶子数=37+13=50。

3. **完全二叉树节点编号**：已知节点 i，求父节点（i/2 下取整）、左孩子（2i）、右孩子（2i+1）。

   例：完全二叉树中，节点 10 的父节点是？左孩子是？

   解析：父节点=10/2=5，左孩子=2*10=20。

易错点提示

- 中序遍历与前/后序结合时，需准确划分左右子树范围，避免混淆节点归属。
- 完全二叉树计算时，注意最后一层节点数与上层非叶子节点数的关系（最后一层节点数=总节点数-前 h-1 层节点数）。
- 层序遍历需按层次从左到右访问，不可遗漏或颠倒同层节点顺序。

习题

1. 一棵深度为 h 的满二叉树具有多少个节点？

   A. 2^h - 1

   B. 2^(h - 1)

   C. 2^h

   D. h^2

   答案：**A。满二叉树是指除最后一层无任何子节点外，每一层上的所有结点都有两个子结点的二叉树。深度为 h 的满二叉树节点数为 2^0 + 2^1 + … + 2^(h - 1)，根据等比数列求和公式可得其结果为 2^h - 1。**

2. 在二叉树的中序遍历中，若某节点有左子树，则该节点的直接前驱是其左子树中的哪个节点？

   A. 最左节点

   B. 最右节点

   C. 根节点

   D. 任意节点

   答案：**B。中序遍历的顺序是左子树 -> 根节点 -> 右子树，所以若某节点有左子树，其直接前驱是左子树中按中序遍历最后访问的节点，也就是左子树的最右节点。**

3. 以下哪种遍历方式可以唯一确定一棵二叉树？

   A. 前序遍历和中序遍历

   B. 前序遍历和后序遍历

   C. 中序遍历和层次遍历

   D. 前序遍历和层次遍历

   答案：**A。前序遍历的顺序是根节点 -> 左子树 -> 右子树，中序遍历的顺序是左子树 -> 根节点 -> 右子树。通过前序遍历可以确定根节点，再结合中序遍历可以划分出左子树和右子树的节点集合，进而递归地确定整棵二叉树。而前序遍历和后序遍历、中序遍历和层次遍历、前序遍历和层次遍历都不能唯一确定一棵二叉**

树。

4. 对于一个具有 n 个节点的完全二叉树，若按层次顺序（从 1 开始）对节点进行编号，则编号为 i 的节点的左孩子节点编号是？

   A. 2i

   B. 2i + 1

   C. i/2

   D. (i - 1)/2

   答案：A。在完全二叉树中，若节点编号从 1 开始，编号为 i 的节点，其左孩子节点编号为 2i，右孩子节点编号为 2i + 1（前提是这些节点存在）。

5. 二叉树的后序遍历序列为 GDBHEIFCA，中序遍历序列为 GDBAECHIF，则其前序遍历序列为？

   A. ABGDC EHIFC

   B. ABGDCEHIF

   C. ABGDECHIF

   D. ABGDECFIH

   答案：B。后序遍历的最后一个节点是根节点，所以根节点是 A。在中序遍历中找到 A，A 左边的 GD 是左子树节点，右边的 B ECHIF 是右子树节点。然后对左右子树分别按照后序和中序遍历的特点递归分析，可得出该二叉树的前序遍历序列为 ABGDCEHIF。